Conception optimale de mécanismes compliants par la méthode des lignes de niveaux

François Jouve(1), **Houari Mechkour**(2)

(1) *Laboratoire J.L. Lions (UMR 7598)*
Université Paris 7 - Denis Diderot
75252 Paris Cedex 05, France
jouve@math.jussieu.fr

(2) *Centre de Mathématiques Appliquées (UMR 7641)*
École Polytechnique, 91128 Palaiseau, France
mechkour@cmap.polytechnique.fr

RÉSUMÉ. *Dans le cadre de l'optimisation de structures élastiques, nous proposons deux extensions naturelles de la méthode des lignes de niveaux qui peuvent s'avérer utiles aux concepteurs de micro-mécanismes. Nous introduisons deux nouvelles fonctions-coût, proches de celles utilisées dans le domaine de la conception de mécanismes, ainsi qu'une stratégie pour traiter le cas de mécanismes adaptés à plusieurs chargements (multi-chargement). Nous illustrons ce travail par quelques exemples numériques.*

ABSTRACT. *In the context of structural optimization, we propose two natural extensions of the level set method for the design of compliant mechanisms. Two new objective functions are introduced, well suited to the automatic design of compliant mechanisms, and a strategy for the design of mechanisms adapted to multiple loads is proposed. This work is illustrated with several numericals examples.*

MOTS-CLÉS : *Optimisation de forme, Mécanismes compliants, Courbes de niveau.*

KEYWORDS: *Shape optimization, Compliants mecanisms, Level set.*

1. Introduction

L'utilisation de la représentation par courbes de niveau (ou level set) dans le domaine de l'optimisation de structures a récemment permis de remettre au goût du jour les techniques classiques d'optimisation de formes par variation de frontière (Allaire *et al.*, 2002b)(Allaire *et al.*, 2004)(Wang *et al.*, 2003). Plus précisément, les techniques initialement introduites pour le suivi de frontières libres (cf. (Osher *et al.*, 1988)) permettent de d'éviter, grâce à une représentation des structures sur un maillage fixe donné une fois pour toute, une partie des inconvénients classiques des méthodes de gradient basées sur la dérivée de forme. En particulier les problèmes d'instabilités numériques dues au remaillage des formes à chaque étape de l'algorithme sont supprimés. Les méthodes basées sur la représentation par level set s'implémentent aussi aisément en 2d qu'en 3d. Pour autant les avantages connus des méthodes de variation de domaine sont préservés : facilité de traitement de différents modèles physiques et de fonctions-coût générales. D'autre part, ces méthodes peuvent aisément devenir "topologiques" au sens strict du terme en les couplant de façon adéquate avec des techniques de type gradient topologique (Allaire *et al.*, 2005b).

Les mécanismes compliants sont des structures homogènes, sans jonctions, destinées à accomplir une action (déplacement ou effort donné) lorsqu'elles sont soumises à une sollicitation extérieure donnée. Dans le domaine de l'optimisation de mécanismes compliants nous avions proposé, dans un précédent travail (Allaire *et al.*, 2005a), des résultats utilisant ces techniques en les comparant à d'autres méthodes d'optimisation de formes également efficaces pour la conception optimale de ce genre de structures (Allaire *et al.*, 2002a)(Sigmund, 1997).

Par rapport à la version de la méthode des courbes de niveau décrite dans (Allaire *et al.*, 2004), nous proposons ici deux extensions, qui rentrent naturellement dans le cadre de ces algorithmes, et qui peuvent s'avérer très utiles aux concepteurs :

1) **Nouvelles fonction-coût :** nous introduisons deux nouvelles fonctions-coût, écrites sous une forme intégrale qui plus adaptée à la dérivation de forme que nous utilisons. Elles sont similaires à deux fonctions-coût largement utilisées dans le domaine de la conception de micro-mécanismes (en général posées sous forme ponctuelle ou discrète) : l'avantage mécanique (Mechanical Advantage ou MA qui maximise le rapport entre les efforts de sortie et d'entrée) et l'avantage géométrique (Geometrical Advantage ou GA qui maximise le rapport entre les déplacements de sortie et d'entrée). Nous comparons sur différents cas-tests les structures obtenues pour ces nouvelles fonctions-coût avec celles obtenues pour la fonction-coût que nous utilisions précédemment.

2) **Multi-chargement :** nous proposons une méthode pour traiter les cas multi-chargement, dans lesquels une même performance-cible peut être obtenue par différentes sollicitations extérieures.

2. Description de la méthode

2.1. *Dérivée de forme*

Soit Ω un domaine borné de $\mathbb{R}^d$ ($d = 2, 3$) régulier (dans lequel doit d'inscrire la forme du mécanisme), inclus dans un domaine de travail D borné qui contient toutes les formes admissibles. Nous considérons un problème d'optimisation de forme du type

$$\inf_{\Omega \in \{\Omega \subset D, \Omega \text{ admissible}\}} J(\Omega).$$

Nous cherchons à faire varier la forme du domaine Ω afin d'optimiser une fonction-coût donnée $J(\Omega)$. Dans le cadre de la conception de mécanismes, il existe un grand nombre de choix de fonctions-coûts. Nous limiterons notre étude à trois propositions. Le premier choix est le suivant :

$$J_1(\Omega) = \Big(\int_\Omega k(x)|u(x) - u_0(x)|^2 \, dx \Big)^{\frac{1}{2}}, \qquad [1]$$

où u_0 désigne un déplacement-cible donné et k est une fonction bornée sur Ω servant typiquement à localiser la zone sur laquelle on désire contrôler le déplacement de la structure.
Le second choix, apparenté au critère de l'avantage mécanique (MA), s'écrit :

$$J_2(\Omega) = -\frac{\displaystyle\int_\Omega \chi_{out}(x)(l_{out}(x), u(x)) \, dx}{\Big(\displaystyle\int_\Omega \chi_{in}(x)|u|^2(x) \, dx \Big)^{1/2}}, \qquad [2]$$

où χ_{in} et χ_{out} sont les fonctions caractéristiques correspondant respectivement aux domaines d'entrée et de sortie, et l_{out} est un vecteur qui détermine la direction de sortie souhaitée.
Le dernier choix, apparenté au critère de l'avantage géométrique (GA), s'écrit :

$$J_3(\Omega) = -\int_\Omega \chi_{out}(x)(l_{out}(x), u(x)) \, dx. \qquad [3]$$

Suivant l'approche de Murat-Simon (Murat *et al.*, 1976), il est possible de calculer la dérivée de forme qui mesure les variations de la fonction-coût pour une variation infinitésimale du bord de Ω suivant un champ vectoriel θ (il est remarquable que cette dérivée directionnelle ne dépende en fait que de la trace normale $\theta.n$ de θ sur le bord $\partial\Omega$). Les expressions des dérivées sont données dans (Allaire *et al.*, 2004) (Allaire *et al.*, 2005b). Elles dépendent du champ de déplacement u et de l'adjoint p, solution du problème adjoint.

2.2. *Paramétrisation des formes par une courbe de niveaux*

Nous paramétrons la frontière de Ω par la fonction courbe de niveaux définie sur D par

$$\left\{ \begin{array}{lcl} \psi(x) = 0 & \Leftrightarrow & x \in \partial\Omega \cap D, \\ \psi(x) < 0 & \Leftrightarrow & x \in \Omega, \\ \psi(x) > 0 & \Leftrightarrow & x \in (D \backslash \bar{\Omega}). \end{array} \right. \quad [4]$$

Les équations de l'élasticité pour le champ de déplacement u ainsi que pour l'adjoint p sont prolongées au domaine D tout entier par la méthode du matériau fictif qui consiste à remplir les trous $D\backslash\bar{\Omega}$ d'un matériau mou, simulant le vide tout en évitant la singularité de l'opérateur d'élasticité.

2.3. *Algorithme numérique d'optimisation*

Bouger la frontière de Ω suivant la direction de descente $-J^{'}(\Omega)$ revient à transporter ψ par l'équation d'Hamilton-Jacobi :

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} - v|\nabla \psi| = 0, \quad [5]$$

où v est défini, pour chaque fonction-coût, par l'expression de la dérivée de forme correspondante.
Nous utilisons le même algorithme que (Allaire *et al.*, 2004) :

1) Initialisation de la fonction level set ψ_0 correspondant à une forme initiale Ω_0.

2) Itération jusqu'à convergence, pour $k \geq 0$:

(a) calcul de l'état u_k et de l'état adjoint p_k par la résolution de deux problèmes d'élasticité linéarisée posés sur Ω_k,

(b) déformation de Ω_k par résolution de l'équation d'Hamilton-Jacobi (5). La nouvelle forme Ω_{k+1} est caractérisée par la fonction courbe de niveaux ψ_{k+1} solution de (5) après un ou plusieurs pas de temps Δt_k en partant de la condition initiale $\psi_k(x)$ avec la vitesse $-v_k$ calculée en fonction de u_k et de p_k. Le pas de temps Δt_k est choisi tel que $J(\Omega_{k+1}) \leq J(\Omega_k)$.

3) De temps en temps, pour des raisons de stabilité, la fonction ψ_k est réinitialisée en résolvant une autre équation d'Hamilton-Jacobi dont la solution stationnaire est la fonction distance signée à la courbe de niveau 0.

L'équation (5) est résolue par un schéma explicite décentré sur une grille cartésienne, ou bien par un schéma spécifique lorsque le maillage est non structuré. Des extensions à la méthode ci-dessus ainsi que nombreux détails d'implémentation sont décrits dans (Allaire *et al.*, 2004) (Allaire *et al.*, 2005b).

3. Résultats numériques

A titre d'illustration, nous présentons d'abord un exemple de micro-pince compliante en deux dimensions. Il s'agit une micro-pince ayant le même cahier des charges qu'une micro-pince articulée développée à l'IEMN[1]. Les conditions aux limites (points d'appui et forces extérieures), ainsi que les caractéristiques mécaniques du matériau utilisé sont des données du problème. La Figure 1 montre la solution optimale proposée par notre méthode.

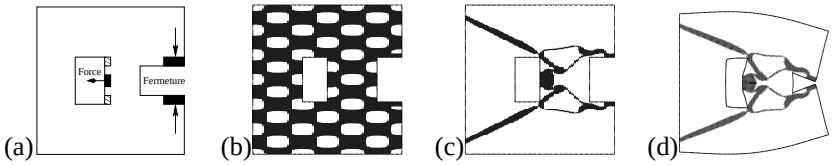

Figure 1. Micro-pince 2d : *(a) Description du mécanisme, (b) Structure initiale, (c) Structure optimale au repos, (d) Structure optimale déformée.*

Nous proposons ici de reprendre un cas-test traité dans (Lobontiu *et al.*, 2003). Nous illustrons ainsi les différentes formes optimales obtenues par les trois fonctions-coût proposées (Figure 2). Signalons que la fonction-objectif J_1, utilisée jusqu'alors dans les travaux (Allaire *et al.*, 2002b) (Allaire *et al.*, 2004), fait le lien entre les deux autres critères, et ceci grâce à sa capacité de pondérer l'importance des zones d'entrée et de sortie en utilisant la fonction k.

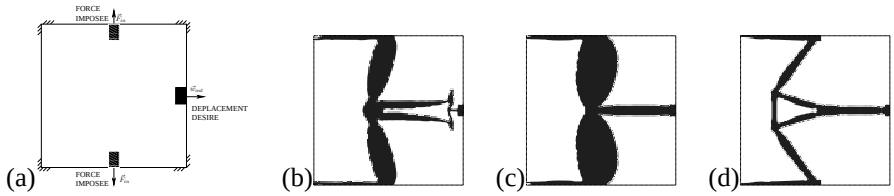

Figure 2. *(a) : Description du mécanisme, (b) : Solution optimale à l'aide du critère de moindres carrés J_1, (c) : Solution optimale pour le critère de l'avantage mécanique J_2, (d) : Solution optimale pour le critère de l'avantage géométrique J_3.*

Nous considérons enfin un mécanisme inverseur d'effort, optimal pour un multi-chargement de deux jeux de forces et le critère de l'avantage géométrique. La Figure 3 montre la solution optimale obtenue, ainsi que ses déformées sous l'action successive des deux chargements. On obtient un mécanisme compliant capable d'effectuer une tâche donnée (déplacement de sortie) pour deux types de forces d'entrée distinctes appliquées indépendemment.

---

1. Institut d'Électronique, de microélectronique et de Nanoélectronique, `http ://www.iemn.univ-lille1.fr/`.

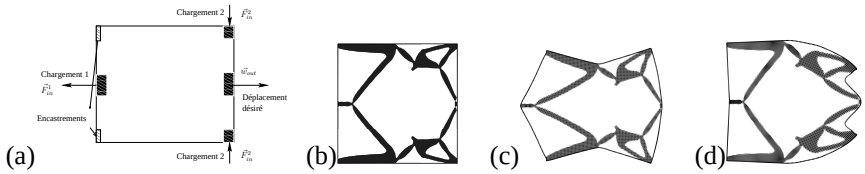

Figure 3. Multi-chargement avec deux jeux de forces : *(a) Description du mécanisme, (b) : Structure optimale au repos, (c) : Structure optimale déformée sous l'action de la première force, (d) : Structure optimale déformée sous l'action de la deuxième force.*

Remerciements : Une partie de ce travail a été rendue possible grâce aux deux contrats CEA-4000154343 et CEA-4000237437 avec le Laboratoire de Robotique et de Mesorobotique (LRM) du CEA-LIST.

4. Bibliographie

Allaire G., De Gournay F., Jouve F., « Optimisation de forme de micro-mécanismes compliants par la méthode des courbes de niveau », *Actes du 7ème Colloque National en Calcul des Structures*, Hermes, Giens, p. 229-234, 2005a.

Allaire G., Jouve F., « Optimal design of micro-mechanisms by the homogenization method », *European Journal of Finite Elements*, vol. 11, p. 405-416, 2002a.

Allaire G., Jouve F., « A level-set method for vibration and multiple loads structural optimization », *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, vol. 194, p. 3269-3290, 2005b.

Allaire G., Jouve F., Toader A.-M., « A level-set method for shape optimization », *C. R. Acad. Sci., Paris, Série I*, vol. 334, p. 1125-1130, 2002b.

Allaire G., Jouve F., Toader A.-M., « Structural optimization using sensitivity analysis and a level set method », *J. Comp. Phys.*,, vol. 194, n° 1, p. 363-393, 2004.

Lobontiu N., Garcia E., « Analytical model of displacement amplification and stiffness optimization for a class of flexure-based compliant mechanisms », *Computers and Strucutres*, vol. 81, p. 2797-2810, 2003.

Murat F., Simon J., « Etudes de problèmes d'optimal design », *Lectures Notes in Computer Science 41*, Springer Verlag, Berlin, p. 54-62, 1976.

Osher S., Sethian J., « Front propagating with curvature dependent speed : algorithms based on Hamilton-Jacobi formulations », *J. Comp. Phys.*, vol. 78, p. 12-49, 1988.

Sethian J., Weigmann A., « Structural boundary design via level set and immersed interface methods », *J. Comp. Phys.*, vol. 163, p. 489-528, 2000.

Sigmund O., « On the design of compliant mechanisms using topology optimization », *Mech. Struct. Mach.*, vol. 25, p. 493-524, 1997.

Wang M., Wang D., Guo A., « A level set method for structural topology optimization », *Comput. Methods Appl. Engrg.*, vol. 192, p. 227-246, 2003.

ANNEXE POUR LE SERVICE FABRICATION
A FOURNIR PAR LES AUTEURS AVEC UN EXEMPLAIRE PAPIER
DE LEUR ARTICLE ET LE COPYRIGHT SIGNE PAR COURRIER
LE FICHIER PDF CORRESPONDANT SERA ENVOYE PAR E-MAIL

1. ARTICLE POUR LA REVUE :
L'objet. Volume 8 – n°2/2005

2. AUTEURS :
François Jouve(1), *Houari Mechkour*(2)

3. TITRE DE L'ARTICLE :
Conception optimale de mécanismes compliants par la méthode des lignes de niveaux

4. TITRE ABRÉGÉ POUR LE HAUT DE PAGE MOINS DE 40 SIGNES :
Mode d'emploi de article-hermes.cls

5. DATE DE CETTE VERSION :
24 janvier 2007

6. COORDONNÉES DES AUTEURS :

– adresse postale :

(1) Laboratoire J.L. Lions (UMR 7598)
Université Paris 7 - Denis Diderot
75252 Paris Cedex 05, France
jouve@math.jussieu.fr

(2) Centre de Mathématiques Appliquées (UMR 7641)
École Polytechnique, 91128 Palaiseau, France
mechkour@cmap.polytechnique.fr

– téléphone : 01 44 27 69 67
– télécopie : 01 69 33 30 11
– e-mail : jouve@math.jussieu.fr

7. LOGICIEL UTILISÉ POUR LA PRÉPARATION DE CET ARTICLE :
LaTeX, avec le fichier de style `article-hermes.cls`,
version 1.2 du 03/03/2005.

8. FORMULAIRE DE COPYRIGHT :
Retourner le formulaire de copyright signé par les auteurs, téléchargé sur :
`http://www.revuesonline.com`

SERVICE ÉDITORIAL – HERMES-LAVOISIER
14 rue de Provigny, F-94236 Cachan cedex
Tél : 01-47-40-67-67
E-mail : revues@lavoisier.fr
Serveur web : http://www.revuesonline.com